Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo, 2008

MA-1112 —Practica: semana 9 —

Ejercicios sugeridos para la semana 9. Cubre el siguiente material: algunas integrales trigonométricas, sustitución trigonométrica para racionalizar y completación de cuadrados.

1. Halle las siguientes integrales utilizando el cambio de variable sugerido:

   a) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$, sugerencia: $x = a\sec(t)$.
   Solución:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx &= a\int \tan^2(t)dt = a\left(\tan(t) - t\right) + C \\ &= \sqrt{x^2-a^2} - a\,\mathrm{arcsec}(x/a) + C = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos(a/x) + C. \end{aligned}$$

   b) $\int \frac{\mathrm{arc\,sen}(x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$, sugerencia: $x = \mathrm{sen}(t)$.
   Solución:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{arc\,sen}(x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx &= \int t\sec^2(t)dt = t\tan(t) + \ln(\cos(t)) + C \\ &= \mathrm{arc\,sen}(x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln(\sqrt{1-x^2}) + C. \end{aligned}$$

   c) $\int \sqrt{a-x^2}dx$, sugerencia: $x = \sqrt{a}\cos(t)$.
   Solución:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a-x^2}dx &= -a\int \mathrm{sen}(t)dt = \frac{-a}{2}\left(t - \mathrm{sen}(2t)/2\right) + C \\ &= \frac{-a}{2}\left(t - \mathrm{sen}(t)\cos(t)\right) + C \\ &= \frac{-a}{2}\left(\arccos(x/\sqrt{a}) - \frac{x\sqrt{a-x^2}}{a}\right) + C. \end{aligned}$$

2. Encuentre $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$ por medio de la sustitución $u = \sqrt{4-x^2}$ y por medio de una sustitución trigonometrica (conveniente). Despues compare sus resultados. Recuerde que $\int \csc(x)dx = \ln|\csc(x) - \cot(x)| + C$.
   Solución: Sea $u = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow 4 - u^2 = x^2$ y $udu = -xdx$. Asi,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx &= \int \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx \\ &= -\int \frac{u^2du}{4-u^2} = u + \ln(\frac{u-2}{u+2}) + C = u + \ln\left(\frac{(u-2)^2}{4-u^2}\right) + C \\ &= \sqrt{4-x^2} + \ln\left(\frac{(\sqrt{4-x^2}-2)^2}{x^2}\right) + C. \end{aligned}$$

Por otro lado, si realizamos el cambio de variable $x = 2\,\mathrm{sen}(t)$, $dx = 2\cos(t)dt$. Así,

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx &= 2\int \tfrac{\cos^2(t)}{\mathrm{sen}(t)}dt \\
&= 2\int (\csc(t) - \mathrm{sen}(t))\,dt \\
&= 2\left(\ln|\csc(x) - \cot(x)| + \cos(t)\right) + C \\
&= \ln\left((\csc(x) - \cot(x))^2\right) + 2\cos(t) + C \\
&= \ln\left(\left(\tfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right)^2\right) + \sqrt{4-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Claramente, ambas soluciones son iguales.

3. Resuelva las siguientes integrales utilizando completación de cuadrados

   a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$, sugerencia: $(x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$ y $x + 2 = \tan(t)$.
   Solución:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = \ln\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}} + (x+2)\right| + C.$$

   b) $\int \sqrt{-x^2+x+1}dx$, sugerencia: $\frac{5}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 = -x^2 + x + 1$ y $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{sen}(t)$.
   Solución:

$$\int \sqrt{-x^2+x+1}dx = \frac{5}{8}\left(\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)\frac{2\sqrt{1+x-x^2}}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

   c) $\int \sqrt{t^2-6t}dt$, sugerencia: $t - 3 = 3\sec(x)$.
   Solución:

$$\int \sqrt{t^2-6t}dt = \frac{(2t-6)\sqrt{t^2-6t}}{4} - \frac{9\ln\left(t - 3 + \sqrt{t^2-6t}\right)}{2} + C.$$

   d) $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}dx$, sugerencia: $\frac{2x-1}{(x-3)^2+4} = \frac{(2x-6)+5}{(x-3)^2+4}$.
   Solución:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}dx = \ln\left(x^2 - 6x + 13\right) + \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right) + C.$$

4. Halle las siguientes integrales

   a) $\int \mathrm{sen}(4y)\cos(5y)dy$.
   Solución:

$$\int \mathrm{sen}(4y)\cos(5y)dy = \frac{-1}{18}\cos(9y) + \frac{1}{2}\cos(y) + C.$$

b) $\int \operatorname{sen}^4(3t)\cos^4(3t)dt$.
Solución:

$$\int \operatorname{sen}^4(3t)\cos^4(3t)dt = \frac{-1}{24}\operatorname{sen}^3(3t)\cos^5(3t) - \frac{1}{48}\operatorname{sen}(3t)\cos^5(3t)$$
$$+\frac{1}{192}\operatorname{sen}(3t)\cos^3(3t) + \frac{1}{128}\operatorname{sen}(3t)\cos(3t) + \frac{3x}{128} + C.$$

c) $\int \tan^4(x)dx$.
Solución:

$$\int \tan^4(x)dx = \frac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x + C.$$

d) $\int \tan^{-3}(x)\sec^4(x)dx$.
Solución:

$$\int \tan^4(x)dx = \frac{-1}{2}\csc^2(x) + \ln(\tan(x)) + C.$$

e) $\int \csc^3(y)dy$.
Solución:

$$\int \csc^3(y)dy = \frac{-1}{2}\csc(y) + \frac{1}{2}\ln|\csc(y) - \cot(y)| + C.$$

f) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(z)\sqrt{\cos(z)}dz$.
Solución: Realizando el cambio de variable $u = \cos(z)$ $du = -\operatorname{sen}(z)dz$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(z)\sqrt{\cos(z)}dz = \int_0^{\sqrt{2}/2} (1-u^2)\sqrt{u}du$$
$$= \left(\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{7}u^{7/2}\right)_0^{\sqrt{2}/2} = 0,3115.$$

g) $\int \frac{3\operatorname{sen}(z)}{\cos^2(z)+\cos(z)-2}dz$.
Solución:

$$\int \frac{3\operatorname{sen}(z)}{\cos^2(z)+\cos(z)-2}dz = \frac{1}{3}\left(\ln|\cos(z)-1| - \ln|\cos(z)+2|\right) + C.$$

h) $\int \frac{dt}{1+\cos^2(t)}$, sugerencia: $1+\cos^2(t) = 2\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)$,
$2\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = \cos^2(t)(2+\tan^2(t))$ y $\frac{1}{1+\cos^2(t)} = \frac{\sec^2(t)}{2+\tan^2(t)}$.
Solución:

$$\int \frac{dt}{1+\cos^2(t)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\tan(t)\right) + C.$$

i) $\int x\operatorname{sen}^3(x)\cos(x)dx$, sugerencia: utilice integración por partes.
Solución:

$$\int x\operatorname{sen}^3(x)\cos(x)dx = \frac{x}{4}\operatorname{sen}^4(x) + \frac{1}{16}\operatorname{sen}^3(x)\cos(x) + \frac{3}{32}\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \frac{3x}{32} + C.$$